

## บทที่ 4 แบบจำลองการไหลทั่วไปและปั่นป่วน

วัตถุประสงค์หลักของบทนี้เป็นการแสดงถึงพื้นฐานของสมการการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งสมการที่ใช้สามารถพิจารณาถึงผลของการไหลในทุกระดับการปั่นป่วนซึ่งมีขนาดทั้งลมหมุนขนาดเล็กและขนาดใหญ่ โดยผลที่ได้อยู่ในรูปของการไหลชั่วขณะทุกช่วงเวลาที่ทำการศึกษา ซึ่งทำให้การประมวลผลมีการใช้ทรัพยากรเพื่อใช้การคำนวณมาก โดยสมการที่นิยมใช้ คือ สมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งมีองค์ประกอบจากส่วนสมการการไหลต่อเนื่องและส่วนสมการอนุรักษ์โมเมนตัมของไหล โดยปริมาณความเร็วการไหลชั่วขณะ  $U(t)$  เกิดขึ้นจากองค์ประกอบที่จำแนกได้เป็น (1) ปริมาณความเร็วเฉลี่ย  $\bar{U}$  (2) ส่วนกวัดแกว่งของความเร็ว  $u'$  และ (3) ส่วนที่จากปรากฏการณ์อื่นที่เกิดขึ้นที่เวลาชั่วขณะนั้น  $u'(t)$  เทอมนี้สามารถละเว้นได้ในบางปริมาณพลศาสตร์การไหลที่สภาวะคงตัว เมื่อพิจารณาอัตราการไหลและแรงกระทำในแต่ละปริมาตรสามารถสร้างสมการเริ่มต้นได้ดังนี้

สมการไหลต่อเนื่อง (Continuity equation)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = 0 \quad (4.1)$$

จากการพิจารณาบนพื้นฐานของแรงกระทำในปริมาตรควบคุม จะมีลักษณะ คือ ผลของแรงทั้งหมดที่กระทำกับผิวข้างของลูกบาศก์เกิดจากแรงทั้งจากความดันและความเค้นเฉือน และอาศัยผลของความแตกต่างของโมเมนตัมเนื่องจากการไหลระหว่างการไหลเข้าและไหลออกตามกฎข้อที่สองของนิวตัน ทำให้สามารถสร้างสมการการอนุรักษ์โมเมนตัม ดังสมการที่ (4.2)

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (Momentum equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}) \quad (4.2)$$

โดยที่

$U_i, U_j$  คือ ความเร็วชั่วขณะของแต่ละแกน

$P$  คือ ความดันชั่วขณะ

$\mu$  คือ สัมประสิทธิ์ความหนืดจลน์

$\rho$  คือ ความหนาแน่นของของไหล

เพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของการไหลด้วยทรัพยากรการประมวลผลที่น้อย เมื่อสมการที่ (4.1) และ (4.2) ถูกเปลี่ยนรูปให้อยู่ในสมการที่แสดงถึงค่าเฉลี่ยของการไหลโดยอาศัยการกระจายตัว ของ  $U = \bar{U} + u'$  และอาศัยกฎการหาค่าเฉลี่ยของคุณสมบัติกวัดแกว่ง (rule to govern times averages of fluctuation properties) เช่น  $\overline{u'} = 0$ ,  $\overline{\bar{U} + \bar{V}} = \bar{U} + \bar{V}$ ,

$\overline{UV} = \bar{U}\bar{V} + \overline{u'v'}$ ,  $\overline{U\bar{V}} = \bar{U}\bar{V}$  หรือ  $\overline{u'\bar{V}} = 0$  จึงได้สมการค่าเฉลี่ยนาเวียร์-สโตกส์ (The Reynolds averaged Navier-Stokes Equations : RANS) คือ

สมการค่าเฉลี่ยเรย์โนลด์สำหรับของไหลไม่ยุบตัวในสภาวะไหลต่อเนื่อง (The Reynolds averaged continuity equation for mean incompressible flow)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{U}_j) = 0 \quad (4.3)$$

สมการค่าเฉลี่ยของการอนุรักษ์โมเมนตัม (The time-averaged mean momentum equation)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U}_i)}_{\text{อัตราเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{U}_i \bar{U}_j)}_{\text{เทอมการพาการไหล}} = - \underbrace{\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}}_{\text{เทอมสร้างความปั่นป่วน}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) \right)}_{\text{เทอมฟุ้งกระจาย}} - \underbrace{\rho \overline{u'_i u'_j}}_{\text{เทอมถ่ายโอนระดับการไหลปั่นป่วน}} \quad (4.4)$$

เมื่อ

$\bar{U}_i$  คือ ค่าเฉลี่ยของเวกเตอร์ความเร็วในแต่ละแกน

$u'_i$  คือ ส่วนกวัดแกว่งของความเร็ว

$\overline{u'_i u'_j}$  คือ ค่าเฉลี่ยความเค้นเรย์โนลด์

$\bar{P}$  คือ ค่าเฉลี่ยความดัน

สมการที่ (4.4) ประกอบด้วย 5 ส่วนหลัก คือ ส่วนของอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม ส่วนของการพาการไหล ส่วนการสร้างความปั่นป่วนการไหลจากความดัน ส่วนการฟุ้งกระจาย และส่วนการสร้างพลังงานจลน์การไหลปั่นป่วน

เพื่อเป็นการศึกษาเชิงคำนวณให้ได้มาซึ่งพฤติกรรมการไหลที่มีความแม่นยำและสอดคล้องกับพฤติกรรมการไหลในปรากฏการณ์จริงที่เกิดขึ้นในสมการ RANS นั้น นักวิจัยต่างๆ พยายามพัฒนาเทอมสุดท้ายซึ่งเป็นการสร้างพลังงานการไหลปั่นป่วนโดยการเพิ่มความสัมพันธ์ของความเค้นเฉือนเรย์โนลด์  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  ที่ปรากฏในสมการ RANS สำหรับความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นมาก่อให้เกิดแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หลายรูปแบบ ซึ่งเนื้อหาส่วนนี้จะแสดงเฉพาะแบบจำลองที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้เท่านั้น

#### 4.1 สมการ the basic eddy viscosity model

สมการ eddy viscosity mode เกิดจากการสร้างความสัมพันธ์ของการถ่ายโอนพลังงานระหว่างของไหลไหลกับลมหมุนขนาดใหญ่ และเกิดการถ่ายเทพลังงานระหว่างลมหมุนจมีขนาดเล็กลงเรื่อยๆ เล็กจนกระทั่งเกิดการสร้างพลังงานความร้อนขึ้น ซึ่งไปตามหลักการ Kolmogorov scale โดยกลไกนี้ทำให้สามารถสร้างความสัมพันธ์ความเค้นเฉือนเรย์โนลด์ ในเทอม  $-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u'_i u'_j})$  ของสมการ RANS สมการที่ (4.4) ซึ่งก่อให้เกิดการประมาณการระดับพลังงานในแต่ละทิศทางตามหลักการ Boussinesq approximation ดังสมการที่ (4.5) ซึ่งเกี่ยวข้องกับความเค้นเฉือนเนื่องจากความหนืด (viscous stresses)

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k \quad (4.5)$$

โดย

$\overline{u'_i u'_j}$  คือ Reynolds stress tensor

$\mu_t$  คือ the turbulent viscosity

k คือ the turbulent kinetic energy

$\delta_{ij}$  คือ Kronecker delta,  $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{when } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{when } i \neq j \end{cases}$

เมื่อ ค่าความหนืดเนื่องจากการไหลปั่นป่วน (the turbulent viscosity :  $\mu_t$ ) คือ ความหนืดขณะมีการไหล และค่าความหนืดเชิงโมเลกุล (the molecular viscosity :  $\mu$ ) เป็นสมบัติของสาร โดยทั้งสองปริมาณนี้มีความเกี่ยวข้องในการทำให้ของไหลเสียรูปได้เช่นกัน

จากหลักการ the Boussinesq approximation ค่าพลังงานในแต่ละทิศทางสามารถสร้างได้เป็น

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3} k - 2\mu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3}k - 2\mu_t \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \quad (4.6\text{ข})$$

$$\overline{w'^2} = \frac{2}{3}k - 2\mu_t \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \quad (4.6\text{ค})$$

เนื่องจากขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงในองค์ประกอบเดียวกับแนวขนานกับทิศทางการเคลื่อนที่  $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}$  และ  $\frac{\partial \overline{W}}{\partial z}$  มีขนาดที่น้อยมาก ดังนั้นจึงสามารถประมาณค่าได้ดัง สมการที่ (4.6)

$$\overline{u'^2} \cong \overline{v'^2} \cong \overline{w'^2} \cong \frac{2}{3}k \quad (4.6)$$

ซึ่งสมการนี้พบว่าความเค้นเฉือนในแนวตั้งฉากมีขนาดเท่ากันทุกทิศทาง ซึ่งในความเป็นจริง สำหรับการไหลในบางกรณีพบว่าความเค้นเฉือนแต่ละทิศทางการกระจายตัวไม่เท่ากัน (anisotropic behaviour) ซึ่งจำเป็นต้องมีการปรับปรุงแบบจำลองให้รองรับการกระจายตัวในทิศทางดังกล่าวต่อไป

#### 4.2 แบบจำลองการไหลปั่นป่วนแบบเชิงเส้น (the Linear high-Re k- $\epsilon$ Model)

สมการเพื่อพิจารณาการไหลปั่นป่วนเริ่มต้น ถูกพัฒนาจาก Launder and Sharma (1974) ในรูปแบบของ the Linear high-Re k- $\epsilon$  model ที่อัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นของของไหลจะเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตรง โดยสมการนี้จะประกอบด้วย สมการการถ่ายเทระดับพลังงานจลน์ของการไหลปั่นป่วน ( $k$ ) และอัตราการฟุ้งกระจายตัวของการไหลปั่นป่วน ( $\epsilon$ ) ดังสมการที่ (4.7) และ (4.8) ซึ่งเป็นสมการสำหรับการไหลแบบไม่ยุบตัว (incompressible flow)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^{(k)}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \rho(P_k - \epsilon - D) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4.8)$$

โดยในสมการนี้มีค่าคงที่เพื่อใช้ในการปรับค่าการไหลบริเวณใกล้ผนังหรือทำการปรับค่าเพื่อควบคุมค่าสูงสุดของความหนืดในการไหลปั่นป่วนหรือเป็นค่าควบคุมสัดส่วนระหว่าง  $k$  กับ  $\epsilon$  คือ  $c_{\mu}$ ,  $C_{\epsilon_1}$ ,  $C_{\epsilon_2}$ ,  $\sigma^{(k)}$  และ  $\sigma_{\epsilon}$  ที่หามาจากการทดลองโดยพิจารณาจากสภาวะต่างๆ คือ สภาวะสมดุลเลเยอร์ อัตราการสูญเสียความเป็นเนื้อเดียวของการไหล นอกจากนี้ยังสามารถหาค่า ความหนืดการไหลปั่นป่วน (The turbulent viscosity :  $\nu_t$ ) ได้ดังสมการที่ (4.9)

$$\nu_t = \frac{c_{\mu} k^2}{\epsilon} \quad (4.9)$$

ตารางที่ 4.1 สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับแบบจำลองประเภท High-Re turbulence model

Turbulence model	$C_{\mu}$	$C_{\epsilon_1}$	$C_{\epsilon_2}$	$\sigma^{(k)}$	$\sigma_{\epsilon}$	$S_t$
Launder and Spalding (1974)	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0

#### 4.3 แบบจำลองการไหลปั่นป่วนแบบไม่เชิงเส้น (the Non-Linear high-Re $k$ - $\epsilon$ Model)

เพื่อเป็นการพิจารณาการไหลของของไหลผ่านวัตถุผิวโค้งหรือวงกลม ซึ่งของไหลต้องมีการตอบสนองหรือรองรับพฤติกรรมที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็ว เช่น อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วในองค์ประกอบแนวสัมผัสผิวเมื่อเทียบกับอัตราการเปลี่ยนแปลงระยะทางในแนวตั้งฉากที่ควรจะสูง ดังนั้นจากข้อพิจารณานี้ทำให้สามารถสร้างแบบจำลอง eddy viscosity model รูปแบบต่างๆ ขึ้นมาได้

##### สมการกำลังสอง (Quadratic EVM)

Shih, Zhu and Lumley (1993) ได้สร้างสมการความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการกำลังสอง ซึ่งทำให้การแปรเปลี่ยนของพฤติกรรมการไหลมีความสัมพันธ์แบบพอลิโนเมียลและส่งผลให้อัตราการเปลี่ยนแปลงความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉาก (normal Reynolds stresses) ของของไหลตลอดผนังมีอัตราการเปลี่ยนแปลงที่สูงขึ้น และมีพฤติกรรมแบบกระจายตัวความเค้นเรย์โนลด์ดังกล่าวแบบไม่สมมาตรรอบจุดก่อเกิดความเค้นเรย์โนลด์ (anisotropy of normal Reynolds stresses) นั้น โดย Pope (1975) ได้ระบุสมมติฐานของแบบจำลอง eddy viscosity ที่มีความสัมพันธ์กับเทอมของ

ค่าเฉลี่ยความเค้นเฉือน ( $S$ ) และ ค่าเฉลี่ยอัตรากระแสวน ( $\Omega$ ) โดยลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นจะถูก  
ระบุเป็นไปตามระดับเลขชี้กำลังของเทอมดังกล่าว ดังสมการที่ (4.10)

$$a_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} = -2 \frac{k}{\varepsilon} C_\mu S_{ij} + c_1 \frac{v_t}{\varepsilon} \left( S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mk} S_{mk} \delta_{ij} \right) \quad (4.10)$$

โดยที่

$$+ c_2 \frac{v_t}{\varepsilon} (\Omega_{ik} S_{jk} - \Omega_{jk} S_{ki})$$

$$+ c_3 \frac{v_t}{\varepsilon} \left( \Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{lk} \Omega_{lk} \delta_{ij} \right)$$

ความเค้นเฉือน

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.11)$$

อัตรากระแสวน

$$\Omega_{ij} = \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.12)$$

ตารางที่ 4.2 แสดงถึงค่าคงตัวเพื่อใช้ในการปรับค่าใกล้ผนัง หรือควบคุมอัตราความสัมพันธ์ระหว่าง  $k$  และ  $\varepsilon$   
ในช่วงการไหลแบบ anisotropic ของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเฉือน

Model	$C_\mu$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
Shih, Zhu and Lumley (1993)	$\frac{2/3}{1.25 + S_{ij} + 0.9\Omega_{ij}}$	$\frac{3}{1000 + S_{ij}^3}$	$\frac{15}{1000 + S_{ij}^3}$	$\frac{-19}{1000 + S_{ij}^3}$

นอกจากนี้ค่าคงตัวของพฤติกรรมกรไหลอื่นๆ สำหรับสมการการขนถ่ายพลังงานการไหลให้เป็นไป  
ตามค่าคงที่ที่ Launder and Spalding (1974) ได้นำเสนอไว้ดังตารางที่ 4.1

#### 4.4 แบบจำลองความเค้นเรย์โนลด์ (the Reynolds Stress Model)

สมการ the Reynolds Stress Model (RSM) ได้พัฒนาโดย Gibson & Launder (1978) มีความเกี่ยวข้องในการทำนายโดยให้ความสัมพันธ์ของความเค้นเฉือนให้ขึ้นอยู่กับแต่ละคุณสมบัติ ดังสมการที่ (4.13)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho U_k \overline{u'_i u'_j}) = \frac{\partial}{\partial x_k} d_{ijk} + \rho(P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}) \quad (4.13)$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} d_i^{(\varepsilon)} + \rho(C_{\varepsilon 1} f_1 P^{(k)} - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} + \rho(S_1 + S_\varepsilon) \quad (4.14)$$

เมื่อ

$C_{\varepsilon 1}$  และ  $C_{\varepsilon 2}$  คือ สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ความหนืดในแบบจำลอง high-Reynolds number เป็น 1.44 และ 1.92 ตามลำดับ

$f_1$  และ  $f_2$  คือ สัมประสิทธิ์ค่าคงที่ความหนืดในแบบจำลอง low-Reynolds number มีค่า คือ 1 ทั้งหมด

อัตราการสร้างการไหลปั่นป่วนโดยความเค้นเฉือน (The generation rate of the turbulence stress by mean strain) กำหนดโดย

$$P_{ij} = -\left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} \right) \quad (4.15)$$

โดยแหล่งกำเนิดพลังงานการไหลปั่นป่วน (turbulent production rate)

$$P^{(k)} = \frac{1}{2} P_{ii} \quad (4.16)$$

อัตราการฟุ้งกระจายตัวของความหนืดของไหล (The viscous dissipation rate of the stress component)

$$\varepsilon_{ij} = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \quad (4.17)$$

อัตราการฟุ้งกระจายของการไหลแบบปั่นป่วน

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{ii} \quad (4.18)$$

อัตราการแพร่ในบริเวณเลเยอร์ความหนืดของไหล (The viscous diffusion term)

$$d_{ijk} = d_{ijk}^{(p)} + d_{ijk}^{(u)} + \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = -\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} - \overline{p' u'_j} \delta_{ik} - \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \quad (4.19)$$

เมื่อ

$d_{ijk}^{(p)}$  คือ การฟุ้งกระจายตัวของความหนืดการไหลเนื่องจากความดัน (the viscous diffusion due to pressure)

$d_{ijk}^{(u)}$  คือ การฟุ้งกระจายตัวของความหนืดการไหลเนื่องจากความเร็ว (the viscous diffusion due to velocity)

จากสมมติฐาน the generalized gradient diffusion hypothesis (GGDH) of Daly and Harlow (1970) สมการที่ (4.19) สามารถสร้างได้เป็นสมการที่ (4.20)

$$d_{ijk} = c_s \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} + \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \delta_{kl} \quad (4.20)$$

โดยอัตราการแพร่เนื่องจากพลังงานการไหลปั่นป่วน

$$d_k^{(\varepsilon)} = (\mu \delta_{kl} + c_\varepsilon \frac{\rho k u_k u_l}{\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \quad (4.21)$$



เมื่อ

$c_s$  คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายตัวที่บริเวณเลเยอร์ (layer diffusion process coefficient : 0.25)

$c_\varepsilon$  คือ สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายตัวของของไหลปั่นป่วน (turbulent diffusion coefficient : 0.15)

อัตราความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความเค้น (Pressure-Strain Correlation)

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^{(1)} + \Phi_{ij}^{(2)} + \Phi_{ij}^{(w)} \quad (4.22)$$

ในงานวิจัยนี้ได้รวมพิจารณาผลของการไหลของของไหลไม่ยุบตัวปะทะเข้าสู่ผนัง โดยใช้แบบจำลองของ Launder, Reece and Rodi (1975) ที่ให้สหสัมพันธ์ระหว่างปริมาณความดันและความเค้น ที่เกิดขึ้น ดังนี้

เทอมที่หนึ่งของความสัมพันธ์  $\Phi^{(1)}$  มุ่งเน้นเพื่อปรับลดค่าการกระจายตัวแบบไม่สมมาตรของพลังงานการไหลปั่นป่วนรอบโหนดที่พิจารณา โดยการปรับลดค่าที่เกิดขึ้นลดลงอย่างเล็กน้อย (slow part) ซึ่งเกิดจากการปฏิสัมพันธ์กันระหว่าง turbulence กับ turbulence โดยมีความสัมพันธ์ คือ

$$\Phi_{ij}^{(1)} = -C_1 \varepsilon a_{ij} \quad (4.22ก)$$

เทอมที่สองของความสัมพันธ์  $\Phi^{(2)}$  มุ่งเน้นเพื่อปรับลดค่าการกระจายตัวแบบไม่สมมาตรของพลังงานการไหลปั่นป่วนรอบโหนดที่พิจารณา โดยการปรับลดค่าที่เกิดขึ้นลดลงอย่างมาก (rapid part) ซึ่งเกิดจากการปฏิสัมพันธ์กันระหว่างการไหลแบบอิสระ กับ turbulence และส่งผลกับค่าความเค้นเรย์โนลด์ต์ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงอัตราการสร้างการไหลแบบปั่นป่วน โดยมีความสัมพันธ์ คือ

$$\Phi_{ij}^{(2)} = -C_2 (P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij}) \quad (4.22ข)$$

และเทอมผลที่เกิดขึ้นจากการสะท้อนกลับอันเนื่องมาจากไหลปะทะผนัง

$$\Phi_{ij}^{(w)} = (\tilde{\Phi}_{ki} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{ik} n_j n_k - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jk} n_i n_k) f \quad (4.22ค)$$

เมื่อ

$$\tilde{\Phi}_{ij} = C_1^{(w)} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} + C_2^{(w)} \Phi_{ij}^{(2)} \dots \quad (4.22ค-1) \quad \text{และ} \quad f = \frac{k^{\frac{3}{2}} / \varepsilon}{C_1 y_n} \quad \dots (4.22ค-2)$$

โดยมีค่าคงที่ต่าง ๆ ดังนี้

$$C_1 = 1.8 \quad C_2 = 0.6 \quad C_1^{(w)} = 0.5 \quad C_2^{(w)} = 0.3 \quad \text{และ} \quad C_1 = 2.5$$

อย่างไรก็ตามในเทอมที่สองของความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความเค้นเรย์โนลด์ที่เกิดขึ้นยังเกิดข้อจำกัดสำหรับบางเงื่อนไขการไหล เช่น ในการไหลแบบฉืด ปริมาณความเค้นเรย์โนลด์ในแนวสัมผัสกับผนังและขนานกับการทิศทางการไหลจะมีขนาดที่สูงมากเกินไป เพราะไม่มีการกระจายค่าไปยังทิศทางตามแนวแกนอื่น สำหรับการไหลผ่านบริเวณพื้นที่ความดันสูงนั้น จะเกิดปัญหาความเค้นเรย์โนลด์ในทิศทางตั้งฉากและพุ่งออกจากผนังอย่างมากเนื่องจากการกระจายตัวของพลังงานการไหลแบบปั่นป่วนมีความไม่สมมาตรรอบโหนดการพิจารณา

#### 4.5 สมการมาตรฐานการไหลใกล้ผนัง (the Standard (log-law-based) Wall Function)

เนื่องจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้มีความเกี่ยวข้องกับปริมาตรคำนวณบริเวณรอบผนังมีระยะห่างมาก ซึ่งทำให้ปริมาตรคำนวณเหล่านี้อยู่ในเลเยอร์การไหลปั่นป่วนแบบสมบูรณ์ (fully turbulent region) ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวสัมผัสกับผนังเป็นไปตามกฎ The "logarithmic region" ซึ่งต้องมีค่าไร้หน่วยต่างๆ ที่ต้องทำการวิเคราะห์

ค่าระยะทางไร้หน่วย (The non-dimensional distance :  $y^+$ ) คือ

$$y^+ = \frac{y \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}}{\nu} \quad (4.23)$$

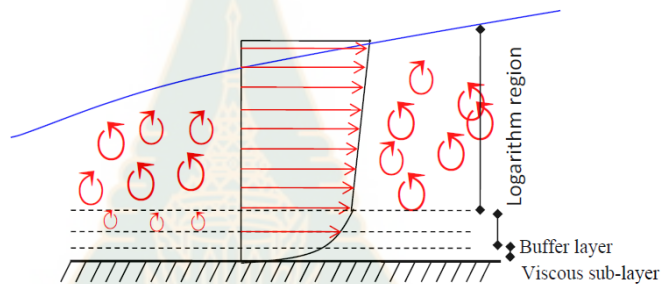
ค่าความเร็วไร้หน่วย (non-dimensional velocity :  $U^+$  ) คือ

$$U^+ = \frac{U}{(\tau_w/\rho)^{1/2}} \quad (4.24)$$

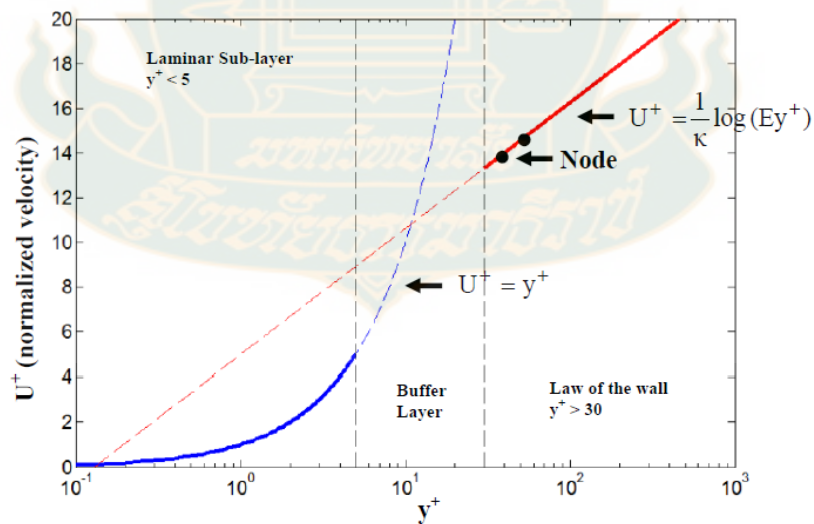
โดยที่

$y$  คือ ระยะห่างระหว่างโหนดในแนวตั้งฉากกับผนัง

$\nu$  คือ สัมประสิทธิ์ความหนืดจำเพาะ



(ก)



(ข)

ภาพที่ 4.1 แผนภาพพฤติกรรมกรไหล (ก) พฤติกรรมของเลเยอร์ที่ระยะห่างจากผนัง (ข) ความสัมพันธ์ไร้หน่วยระหว่างความเร็วกับระยะห่างตามกฎ the logarithmic region

ความสัมพันธ์ของกฎของ The log-law formulation สร้างมาจากความสัมพันธ์ local equilibrium และ the length scale มีขนาดโตแปรผันตรงกับระยะทาง โดยเฉพาะนอกบริเวณ viscous sub-layer ( $30 < y^+ < 250$ ) จาก length scale ( $l_m$ ) ซึ่งมีความสัมพันธ์  $l_m = \kappa y$  จึงสามารถสร้างความสัมพันธ์ the Log-law formulation ได้เป็น

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \quad (4.25)$$

โดย  $\kappa$  คือ ค่าคงตัว the Von Karman constant ( $\kappa = 0.41$ )

E คือ ค่าคงที่การอินทิเกรตจากกฎ The log-law formulation ( $E = 9$ )

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้พื้นฐานของ The log-law formulation ในการพิจารณาหาความเค้นเฉือนที่ผนัง ( $\tau_w$ ) โดยใช้หลักการพิจารณาตาม Popovac & Hanjalic (2007) สำหรับการวิเคราะห์ปริมาณอัตราก่อกำเนิดพลังงานการไหลแบบปั่นป่วนและอัตราการกระจายตัวของการไหลปั่นป่วนที่ปริมาตรการวิเคราะห์ของไหลใกล้ผนัง โดยมีหลักการดังนี้

หากทำการนิยามค่าไร้หน่วยของตัวแปรการไหลที่ขึ้นอยู่กับ  $k$  ซึ่งใช้สัญลักษณ์ “ \* ” จะสามารถสร้างตัวแปรไร้หน่วยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

$$U^* = \frac{Uk^{\frac{1}{2}}}{(\tau_w / \rho)} \quad (4.26)$$

และ

$$y^* = \frac{yk^{\frac{1}{2}}}{\nu} \quad (4.27)$$

โดย  $U^* = U^+ c_\mu^{\frac{1}{4}}$   $y^* = y^+ c_\mu^{\frac{1}{4}}$  และ  $c_\mu$  ค่าคงตัวสัมประสิทธิ์ความหนืด (0.09)

ทำให้ได้กฎ log-law เมื่อการไร้หน่วยขึ้นอยู่กับพลังงานจลน์การไหลปั่นป่วน คือ

$$U^* = \frac{1}{\kappa} \log(E^* y^*) \quad (4.28)$$

เมื่อ  $\kappa^* = c_\mu^{\frac{1}{4}} \kappa$  และ  $E^* = c_\mu^{\frac{1}{4}} E$

ซึ่ง Popovac & Hanjalic (2007) ได้พิจารณาปริมาณความเค้นเฉือนที่ผนัง ได้เป็น

$$\tau_w = \mu \frac{U_P}{y_P} e^{-\Gamma} + \frac{\rho \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}} U_P \Psi_P}{\ln(E y_P^*)} e^{-\frac{1}{\Gamma}} \quad (4.29)$$

เมื่อ  $\Gamma$  คือ ตัวประกอบผสมผสานระหว่างเลขเรย์น็อลด์และเลขเรย์ของไหลปั่นป่วนสมบูรณ์

$$\text{โดยมีค่าเท่ากับ } \Gamma = \frac{0.01 y^+{}^4}{1 + 5 y^+}$$

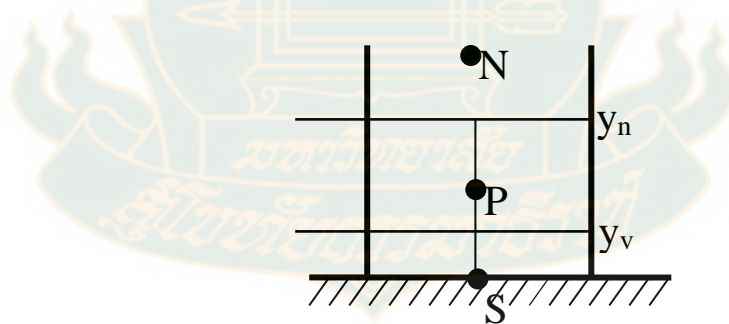
$\Psi$  คือ ปริมาณไร้หน่วยของระดับการเป็นสภาวะไม่สมดุลของการไหลปั่นป่วน (non-

$$\text{equilibrium function) มีขนาด คือ } \Psi_P = 1 - \frac{C_U y_P}{\rho \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}} U_P}$$

$C_U$  คือ ค่าคงที่ของสมการโมเมนตัมของของไหลในแนวสัมผัสกับผิว

$$\text{เป็น } C_U = \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}$$

จากความสัมพันธ์ของ law of log ที่พัฒนาขึ้นมาี้ ทำให้สามารถปรับอัตราการสร้างการไหลปั่นป่วน ( $P_k$ ) และอัตราการแพร่ของการไหลปั่นป่วน ( $\mathcal{E}$ ) ที่บริเวณปริมาตรควบคุมชิดกับผนัง คือ

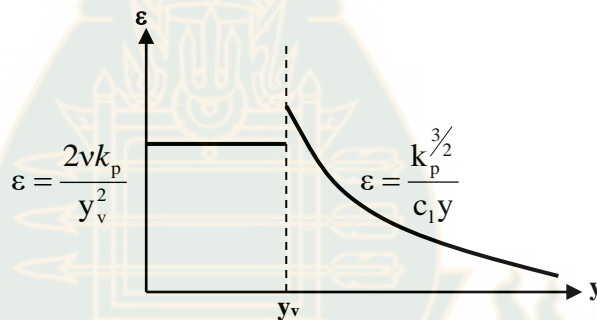


ภาพที่ 4.2 ตำแหน่งของโหนดและเลขเรย์ความหนืดใกล้ผนัง

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_k &= \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} P_k dy \\
 &= \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} dy \\
 &= \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \tau_w \frac{\tau_w}{\kappa c_\mu^{1/4} \rho k_p^{1/2} y} dy \\
 &= \frac{\tau_w^2}{\kappa c_\mu^{1/4} \rho k_p^{1/2} y_n} \ln \left( \frac{y_n}{y_v} \right)
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

สำหรับอัตราการกระจายตัวของการไหลปั่นป่วนขึ้นอยู่กับระยะห่างของปริมาตรควบคุมใกล้เคียงผนังว่าอยู่ในหรือนอกบริเวณ viscous thickness ( $y_v$ ) ซึ่งหากอยู่ในบริเวณดังกล่าว จะมีความสัมพันธ์แบบ

คงที่ คือ  $\varepsilon = \frac{2\nu k_p}{y_v^2}$  หากอยู่นอกบริเวณดังกล่าวจะมีความสัมพันธ์เป็น  $\varepsilon = \frac{k_p^{3/2}}{c_1 y}$  ดังภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.3 ขนาดของ  $\varepsilon$  ตามระยะห่างจากผนังในแนวตั้งฉากในบริเวณเลเยอร์

เมื่อ  $c_1$  คือ ค่าคงตัวขนาดการไหลปั่นป่วนที่สภาวะสมดุล (the equilibrium length scale constant :2.55)

$y_v$  คือ ความหนาของเลเยอร์ความหนืดในแนวตั้งฉากกับผนัง (the edge of the viscous sub-layer)

ดังนั้น การปรับค่าของ อัตราการแพร่กระจายเฉลี่ย ตลอดปริมาตรควบคุมชนิดผนังจึงได้เป็น

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{1}{y_n} \left[ y_v \frac{2vk_p}{y_v^2} + \int_{y_v}^{y_n} \frac{k_p^{3/2}}{c_1 y} dy \right] \\ &= \frac{1}{y_n} \left[ \frac{2k_p}{y_v/v} + \frac{k_p^{3/2}}{c_1} \ln(y_n/y_v) \right]\end{aligned}\quad (4.31)$$

